

Bírálat
Pristyák Levente
”*Dynamics of One-Dimensional Integrable Systems*”
című PhD értekezéséről

Az egydimenziós kvantum soktestrendszerek viselkedésének vizsgálata komoly érdeklődésre tart számot napjainkban a nemzetközi kutatóközösségben. Ez egyrészt annak köszönhető, hogy az elmúlt néhány évtizedben lehetővé vált ezen rendszerek precíz kísérleti vizsgálata, másrészt az egydimenziós rendszerek kitüntetettek abból a szempontból, hogy speciális analitikus és numerikus módszerekkel vizsgálhatóak, melyek magasabb dimenziókban nem, vagy csak nehézkesen alkalmazhatóak. A numerikus módszerek közül fontos kiemelni a mátrixszorzat-állapotokon alapuló módszereket, melyek az elmúlt bő három évtizedben forradalmasították az egydimenziós rendszerek numerikus vizsgálatát. Az egydimenziós rendszereken belül külön is figyelemre méltóak az úgynevezett integrálható modellek, melyek bár kölcsönható modellek, ennek ellenére mégis egzakt eredmények nyerhetők az ún. Bethe-ansatzon alapuló módszerekkel. Fontos megjegyezni azonban, hogy az egzakt analitikus eredmények eléréséhez gyakran igen komplikált és absztrakt számítások elvégzésére van szükség. Az egydimenziós integrálható elméletek dinamikájának vizsgálatára az elmúlt évtizedben sikerrel alkalmazták az úgynevezett általánosított hidrodinamikai (GHD) módszert, mely elméleten belül az ezen rendszereket jellemző végtelen sok megmaradó lokális töltésre felírt kontinuitási egyenletekből kiindulva a rendszer időfejlődése precízen leírható térben inhomogén kezdeti állapotokra is.

Pristyák Levente értekezésében bemutatott eredményeivel a fenti kutatásokba kapcsolódott be. Munkáiban bizonyította mély ismereteit az előző bekezdésben említett analitikus és numerikus módszerek tekintetében. Legkiemelkedőbb eredményének azt tartom, hogy az algebrai Bethe-ansatz (ABA) módszer segítségével matematikailag precíz levezetéssel igazolta a GHD elmélet egyik szemiklasszikus feltevését, mely eredményéből született szakcikkre immár több mint száz hivatkozás érkezett. Az értekezés öt idegen nyelvű szakcikkre épül, melyek mind magas impakt faktorú (Q1) folyóiratban jelentek meg. Ezen publikációkban szereplő eredményeit a Jelölt négy tézispontban foglalta össze. A Jelölt további 3 publikáció (társ-)szerzője, melyek nem kapcsolódnak tézispontokhoz. A fentiek alapján megállapítható, hogy a PhD fokozattal kapcsolatos publikációs követelmények magasán teljesülnek.

A dolgozat nyolc nagyobb fejezetre oszlik, melyeket a tézispontok felsorolása majd részletes – 196 hivatkozást tartalmazó – irodalomjegyzék követ, mely alapján megállapítható a Jelölt alapos tájékozottsága a vizsgált területen. A dolgozatot 5 függelék zárja, melyek kiegészítő numerikus adatokat illetve az alkalmazott módszerek technikai részleteit tartalmazzák.

Az első három fejezetben alapos de lényegre törő bevezetést olvashatunk az integrálható elméletekről, ezen belül azok – általános esettől eltérő – termalizációs tulajdonságairól, valamint az alkalmazható analitikus módszerek (koordináta Bethe-ansatz, algebrai Bethe-ansatz, kvantum inverz-szóráselmélet) alapjairól.

A negyedik fejezetben olvashatjuk a levezetést az általánosított áramoperátorok mátrixelem-formulájához véges térfogatban az $U(1)$ szimmetrikus XXZ-spinlánc esetén, mely eredmény a GHD elmélet precíz megalapozásához szükséges. A levezetés a töltésoperátorok form-faktorainak meghatározásán alapul, melyből a kontinuitási egyenlet segítségével az áramoperátorok form-faktorai is kifejezhetők. Az offdiagonális mátrixelemekből precíz határérték-számítással meghatározásra kerülnek az általánosított áramoperátorok várhatóértékei a Hamilton-operátor tetszőleges sajátállapotára. A végeredmény igen esztétikus, és egzakt módon visszaadja az intuitív szemiklasszikus érvelésből kapott jóslatot. Ehhez a fejezethez kapcsolódik az első tézispont.

Az ötödik fejezetben a Jelölt a negyedik fejezet eredményét általánosítja az XYZ-spinláncra, mely bár integrálható, de – szemben az XXZ-moddal – nem $U(1)$ szimmetrikus, azaz a teljes

spin z -komponense nem jó kvantumszám. A 4. fejezetben bemutatott levezetés ezért nem alkalmazható, hanem az áramoperátorok algebrai konstrukciójából kell kiindulni. Érdekes módon a számolás az $U(1)$ -szimmetrikus esettel formailag azonos eredményre vezet. Ehhez a fejezethez kapcsolódik a második tézispont.

A hatodik és hetedik fejezetben a jelölt az összehajtott ("folded") XXZ-láncot vizsgálja, mely az XXZ-modell speciális, erősen anizotrop $\Delta \rightarrow \infty$ határesetének tekinthető. Először igazolja a modell integrabilitását, valamint meghatározza az első négy töltés alakját, majd bemutatja a modell koordináta Bethe-ansatz megoldását. A modellben, ha szomszédos helyzetben több spint is lefordítunk, kötött állapotok jelennek meg, melyek dinamikáját csupán a nem kötött részecskékkel való ütközések adják. Ezen kötött állapotok a Hilbert-tér feltöredezéséhez vezetnek, azaz az állapotok exponenciálisan sok szektorba rendeződnek, melyek között a Hamilton-operátornak nincs mátrixeleme. A modell alapállapotában azonban nincsenek kötött állapotok. A hatodik fejezet végén egy kötött állapotoktól mentes kvantumkvencs protokoll kerül bemutatásra, mely egzaktul megoldható. A jelölt az analitikus megoldást rövid láncokra végzett egzakt diagonalizációval, valamint a végtelen térfogatban alkalmazható iTEBD módszerrel veti össze és tökéletes egyezést talál. A hetedik fejezetben ugyanezt a rendszert vizsgálja egy integrálható és egy nemintegrálható perturbáció mellett. Az integrálható és nemintegrálható eset közti lényeges különbséget először a modell numerikusan meghatározott szintstatistikájával demonstrálja, majd bemutatja a Hilbert-tér feltöredezés algebrai okát, nevezetesen egy mátrixszorzat-operátor alakú szimmetria-operátort. A fejezet végén iTEBD alapú numerikus szimulációval igazolja a várakozásokat, demonstrálja a termalizáció hiányát és a perzisztens oszcillációkat az integrálható esetben, valamint a termalizációt a nemintegrálható perturbáció bekapcsolása esetén. A hatodik és hetedik fejezethez kapcsolódik a harmadik tézispont.

Végül, a nyolcadik fejezetben egy integrálható spin-létramodell megoldását olvashatjuk. A modell különlegessége, hogy kevert statisztikájú részecskék jelennek meg benne: a létra két szárán külön-külön fermionokat látunk, melyek felcserélése egymással viszont egy nemtriviális fázisfaktor megjelenésével jár. Emiatt a modell kölcsönhatóvá válik. A modell koordináta Bethe-ansatz módszerrel kerül megoldásra, majd a szerző a létra szárai között kialakuló korrelációkra ad analitikus és numerikus eredményeket az alapállapotban és egy kvantumkvencs esetén. Ehhez a fejezethez kapcsolódik a negyedik tézispont.

Az értekezés angol nyelven íródott, szélesebb olvasóközönség számára is jól érthető, olvasmányos stílusban, elütések csak elvétve találhatók a szövegben. Külön kiemelendő, hogy a szerző a legfontosabb eredményeket az egyes fejezetek elején jól érthetően összefoglalja, így a dolgozat azok számára is jól követhető, akik kevésbé járatosak a Bethe-ansatz módszerekben. A disszertáció megjelenése tipográfiai szempontból is megfelelő, a megértést igényes ábrák is segítik.

Az értekezésben bemutatott tézispontok megfogalmazása megfelelő, több társszerzős publikációk esetén a jelölt precízen elhatárolja a saját eredményeit, a tézispontokat pedig ezekre alapozza. A tézispontokban szereplő eredményeket a Jelölt saját kutatási eredményének fogadom el. Az értekezés és a hozzá kapcsolódó kutatási eredmények magas színvonalúak, melyet jól jelez az is, hogy a terület rangos, magas impakt faktorú újságában kerültek publikálásra. Ezek alapján javasolom az értekezés nyilvános vitára való kitűzését és sikeres védelem esetén az alábbi kérdéseimre adott válaszoktól függetlenül a "summa cum laude" minősítés odaítélését.

Kérdések:

1. Bár a 4. fejezet levezetése speciálisan az XXZ-spinláncra történik, de a fő eredmény (a (4.4) és (4.5) egyenletek) azt sejteti, hogy általánosabban is igaz lehet. Ezt erősíti az 5. fejezet is, ahol egy másik modellben is erre az eredményre jutunk. Történt-e az eredmények publikálása óta a szerző által vagy az irodalomban próbálkozás egy ilyen

általánosabb bizonyításra? Ha nem, akkor mi ennek az akadálya, illetve milyen irányban lenne érdemes továbblépni egy általános bizonyításhoz?

2. Az integrálható elméleteket végtelen sok lokális megmaradó töltés található. Az MPS alapú szimulációk nagyban gyorsíthatóak lokális megmaradó mennyiségekkel, bár igaz az is, hogy ilyenkor egyrácshelyes töltéseket használnak csak, pl. a spin z -komponensét az XXZ-láncon. Felmerül a kérdés, hogy lehetne-e használni az integrálhatóságot ezen rendszerek hatékonyabb szimulációjára? Van-e például valamilyen összefüggés az egyes Schmidt-állapotpárok általánosított töltéseloszlása és a teljes kvantumállapot töltése között?
3. A 8. fejezetben numerikusan meghatározásra kerül a két alrác közötti összefonódási entrópia véges láncok esetén, egzakt diagonalizációval. Felmerül a kérdés, hogy lehetséges-e ezt a mennyiséget az integrálhatóságot kihasználva hatékonyabban számolni? Szabad fermionok esetén például a Wick-tételt kihasználva a kétpont-függvények alapján könnyen megadható egy részrendszer entrópiája (Ref: I. Peschel és V. Eisler, <https://arxiv.org/pdf/0906.1663>).

Budapest, 2025. január 30.



Werner Miklós Antal
HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont